Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Μαθηματικό Τμήμα
Τομέας Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών
Μάθημα : Άλγεβρα για την διδακτική
Διδάσκων κ. Ράπτης Ευάγγελος

μεταπτυχιακός φοιτητής

Ιωάννης Π. Πλατάρος

Α.Μ. 211.502



5 Δεκεμβρίου 2002

Να εξεταστεί , ποίες γωνίες της μορφής 9λ+3μ+2 , λ, μ $\in \mathbb{N}$ κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Σκιαγραφώ την απόδειξη:

- Η γωνία των 20^o δεν κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη. (Απόδειξη I)
- Η γωνία των 1^o δεν κατασκευάζεται. Αν κατασκευαζόταν η γωνία της 1^o , τότε θα κατεσκευάζετο και η 2^o (απλή διαδοχική παράθεση) η 3^o , η 4^o κ.ο.κ. και η γωνία των 20^o . Όμως η γωνία των 20^o δεν κατασκευάζεται, όπερ άτοπον. Άρα η 1^o δεν είναι κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη.
- Η γωνία των 36^o κατασκευάζεται (Απόδειξη II)
- Η γωνία των 30^o κατασκευάζεται (Απόδειξη III)
- Η γωνία των $36^o - 30^o = 6^o$ κατασκευάζεται , διότι αν κατασκευάζονται δύο γωνίες, είναι κατασκευάσιμη και η διαφορά τους . (Απόδειξη IV)
- Η γωνία των 3^o κατασκευάζεται από διχοτόμηση της γωνίας 6^o .Κατασκευαζομένης της γωνίας των 3^o , κατασκευάζεται και οποιοδήποτε ακέραιο πολλαπλάσιό της, δηλαδή κάθε γωνία της μορφής 3ρ , ρ$\in \mathbb{N}$.
- Κάθε ακέραιος αριθμός ν $\in \mathbb{N}$ είναι αποκλειστικά και μόνο της μορφής ή 3ρ ή 3ρ+1 ή 3ρ+2 . (Απλό πόρισμα της

Ευκλείδειας διαίρεσης

($\nu : 3 = 2\pi + \upsilon \ \mu\varepsilon \ \upsilon = 0 \ \eta \ 1 \ \eta \ 2$) Αν λοιπόν κατεσκευάζετο η γωνία 3ρ+1 , δεδομένου ότι κατασκευάζεται και η 3ρ , τότε θα κατεσκευάζετο και η διαφορά τους (3ρ+1)-3ρ=1 , άτοπο διότι η γωνία 1^o δεν κατασκευάζεται.

Αν ομοίως κατεσκευάζετο και η γωνία 3ρ+2 , δεδομένου ότι η 3ρ κατασκευάζεται, θα κατασκευάζετο και η διαφορά τους , η γωνία (3ρ+2)-3ρ=2^o . Τότε δια διχοτομήσεως, θα κατασκευάζετο και η γωνία 1^o , άτοπο.

Επομένως , οι μόνες γωνίες που κατασκευάζονται (σε μοίρες) είναι τα πολλαπλάσια του 3 , και μόνον αυτά)

- Άρα , στο τεθέν πρόβλημα, αναζητώ κ , λ $\in \mathbb{N}$ και ν $\in \{1, 2, 3, ..., 119, 120\}$ έτσι ώστε:

$$0 < 9\lambda + 3\mu + 2 \leq 360^o \qquad (1)$$

$$\text{και } 9\lambda + 3\mu + 2 = 3\nu \Leftrightarrow$$

$$9\lambda + 3\mu - 3\nu = 2 \qquad (2)$$

Η (2) αποτελεί διοφαντική εξίσωση με τρεις αγνώστους , την οποία επιλύεται κατά τον γνωστό αλγόριθμο , και τις οποίας οι λύσεις θα πρέπει να πληρούν την συνθήκη (1)

Αλλά η λύση της (2) είναι σύντομη , διότι ισοδυναμεί:

$$9\lambda + 3\mu = 3\nu - 2 \ \Leftrightarrow$$

$$3(3\lambda + \mu) = 3\nu - 2 \ \Leftrightarrow$$

3/(3ν- 2) άτοπο , διότι 3 $\not|$ (3ν-2), με ν $\in \mathbb{N}$

Επομένως, δεν υπάρχουν ακέραιοι λ,μ έτσι ώστε η γωνία $\angle$A= 9λ+3μ-2 εκφραζομένη σε μοίρες , να είναι κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη.________________

<u>*Αναλυτικά τα επί μέρους των αποδείξεων , έχουν ως εξής:*</u>

<u>*Απόδειξη Ι.*</u>**(Η γωνία των 20^o δεν είναι κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη)**

Εάν θ=20^o , τότε από τον τύπο

συν3θ=4συν^{3}θ+3συνθ , με αντικατάσταση θα έχω:

$$\frac{1}{2} = 4\sigma\upsilon\nu^3 20^o + 3\sigma\upsilon\nu 20^o \Leftrightarrow$$ (Θέτοντας συνθ=χ)

$8\chi^3$-6χ -1=0 (1)

Το πολυώνυμο φ(χ) = $8\chi^3$-6χ –1 είναι ανάγωγο επί του Q ,διότι αν δεν ήταν , θα εγράφετο ως γινόμενο με την μορφή:

$\varphi(\chi)=8(\chi-\rho_1)(\chi-\rho_2)(\chi-\rho_3)$ ή $\varphi(\chi)=(\chi-\rho)(\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma)$

και στις δύο περιπτώσεις θα είχε μία τουλάχιστον ρητή ρίζα. Όμως, οι πιθανές ρητές ρίζες, αν υπάρχουν, είναι

μόνο οι $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$.

όμως φ(χ)={[(8χ)χ-6]χ-1} (Εξ ου και το «σχήμα Horner»
και μέσω αυτού ελέγχω γρήγορα ότι:

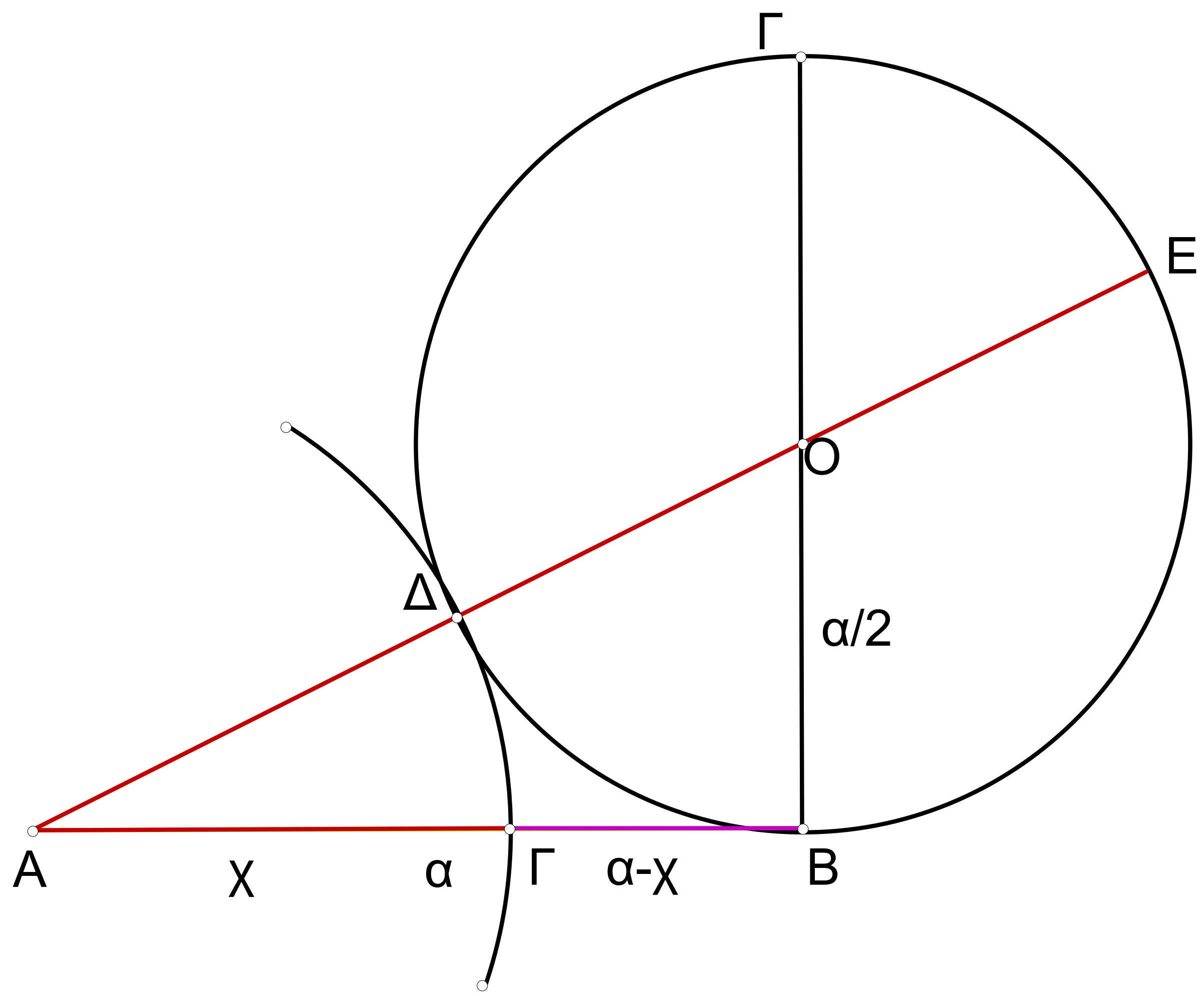
$\varphi(-\frac{1}{2})=1 \neq 0$, $\varphi(\frac{1}{2})=-3 \neq 0$, $\varphi(\frac{1}{4})=-\frac{13}{2} \neq 0$,

$\varphi(-\frac{1}{4})\neq 0$, $\varphi(\frac{1}{8})\neq 0$, $\varphi(-\frac{1}{8})\neq 0$

Επομένως η επέκταση του σώματος Q ,
το σώμα Q(συν 20^o) έχει διάσταση επί του Q τρία
Δηλ. [Q(συν 20^o) : Q]=3 $\neq$ 2^ν .
Όμως η αναγκαία συνθήκη (και μη ικανή) κατασκευασιμότητας για βαθμό επεκτάσεως δύναμη του 2 δεν εκπληρούται, συνεπώς το συν 20^o , άρα και η γωνία των 20^o , δεν είναι κατασακευάσιμη.

***Απόδειξη ΙΙ.* (Η γωνία των 36^o είναι κατασκευάσιμη)**

Κατασκευή με κανόνα και διαβήτη του μέσου και άκρου λόγου **(Χρυσής τομής)**



Έστω ΑΒ=α , το προς διαίρεσιν τμήμα. Φέρω κάθετη στο Β και λαμβάνω τμήμα ΒΓ=α

Με διάμετρο το ΒΓ κατασκευάζω κύκλο. Φέρω την ΑΟ , η οποία τέμνει τον κύκλο στο Δ.

Η ΑΒ , εκ κατασκευής είναι εφαπτόμενη στον κύκλο , διότι είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΒ στο άκρο της Β.

Από την δύναμη του σημείου Α ως προς τον κύκλο , έχω ότι

$(Α\Delta)(ΑΕ)=(ΑΒ)^2 \Leftrightarrow$

$\chi(\chi+\alpha)=\alpha^2 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{x}{a} = \frac{a}{x-a}$ που είναι ο ζητούμενος λόγος.

Στην συνέχεια, με διαβήτη, μεταφέρω το χ πάνω στο α και έτσι έχω επιτύχει την χρυσή τομή.

Για να κατασκευάσω το κανονικό δεκάγωνο , ξεκινώ την ανάλυση του προβλήματος , με το ότι η κεντρική του γωνία πρέπει να είναι $\frac{360^0}{10}$ $=36^o$. Τότε όμως, εκάστη από τις προσκείμενες στην βάση του ισοσκελούς τριγώνου γωνίες θα είναι 72^o . Αν διχοτομήσω μία , τότε η απέναντι ακτίνα χωρίζεται σε μέσο και άκρο λόγο, διότι από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου θα έχω:

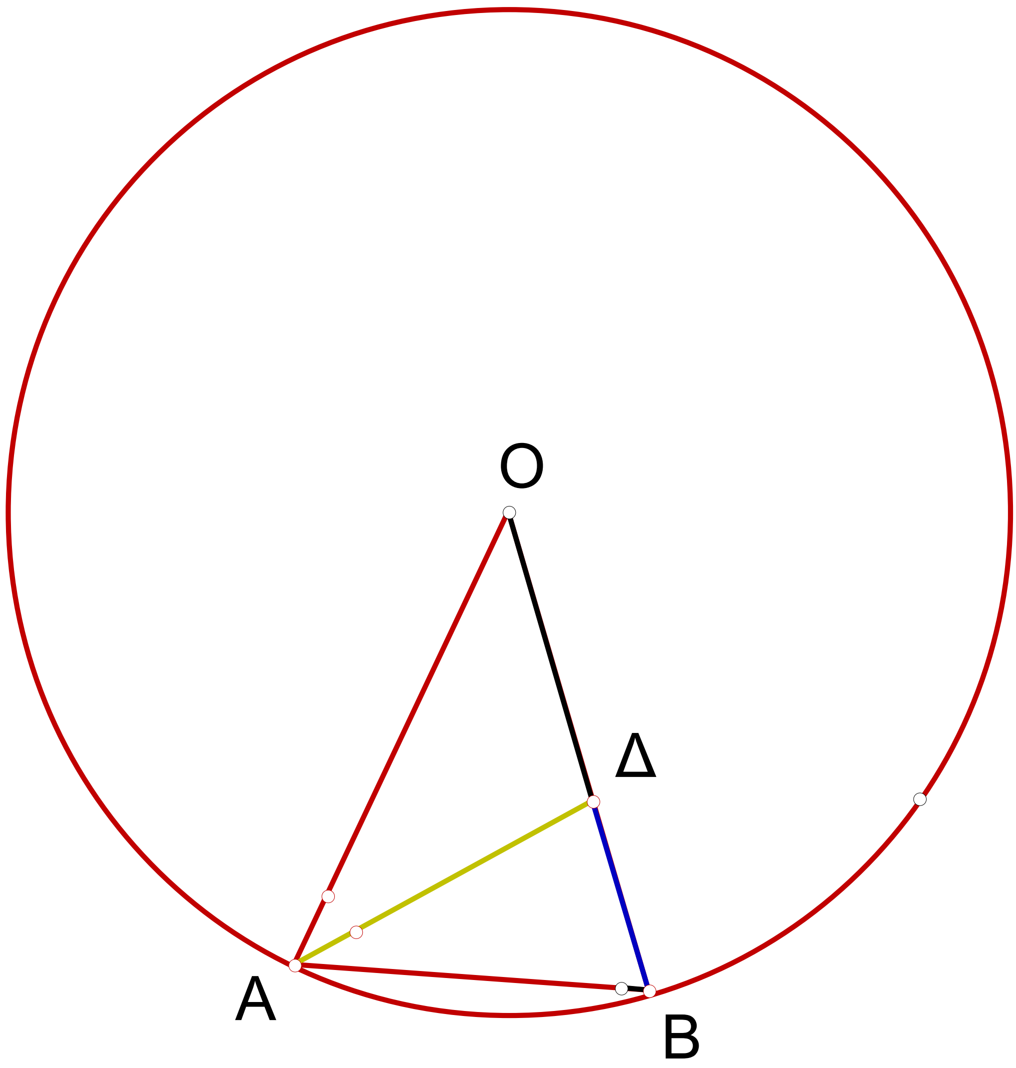
$$\frac{B\Delta}{\Delta O} = \frac{AB}{AO} \Rightarrow$$

$$\frac{B\Delta}{\Delta O} = \frac{\lambda_{10}}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{R-\lambda_{10}}{\lambda_{10}} = \frac{\lambda_{10}}{R} \Rightarrow$$

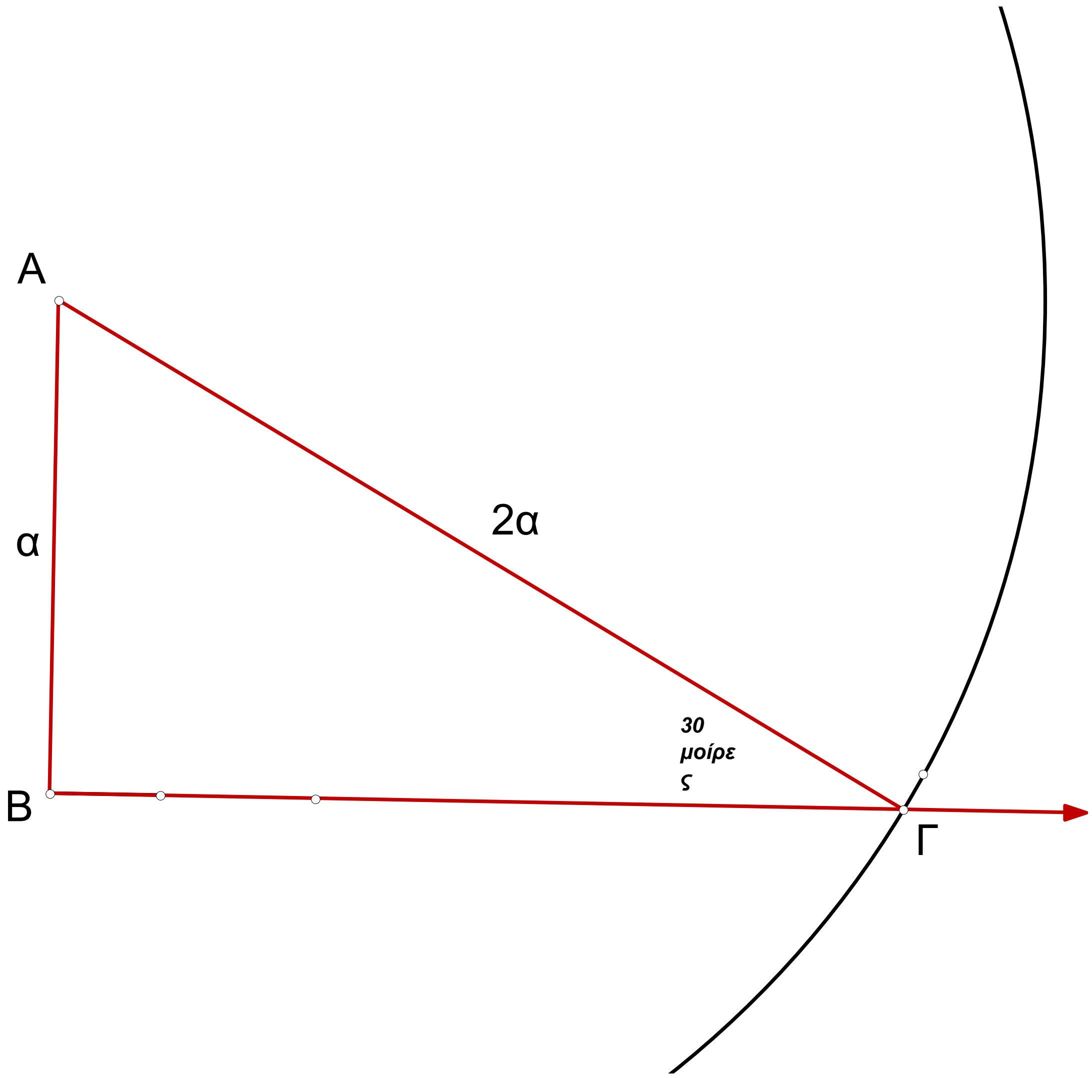
($AB=A\Delta=\Delta O=\lambda_{10}$ λόγω των ισοσκελών τριγώνων)

Οπότε το λ_{10} κατασκευάζεται , είτε με τον κλασσικό τρόπο που έχει περιγραφεί ανωτέρω, χωρίζοντας δηλαδή την ακτίνα του κύκλου σε μέσο και άκρο λόγο και θέτοντας το μεγαλύτερο κομμάτι . λ_{10}
Με αυτό τον τρόπο είναι κατασκευάσιμη και η γωνία των 36^o .



***Απόδειξη ΙΙΙ*. (Κατασκευή της γωνίας των 30^o)**

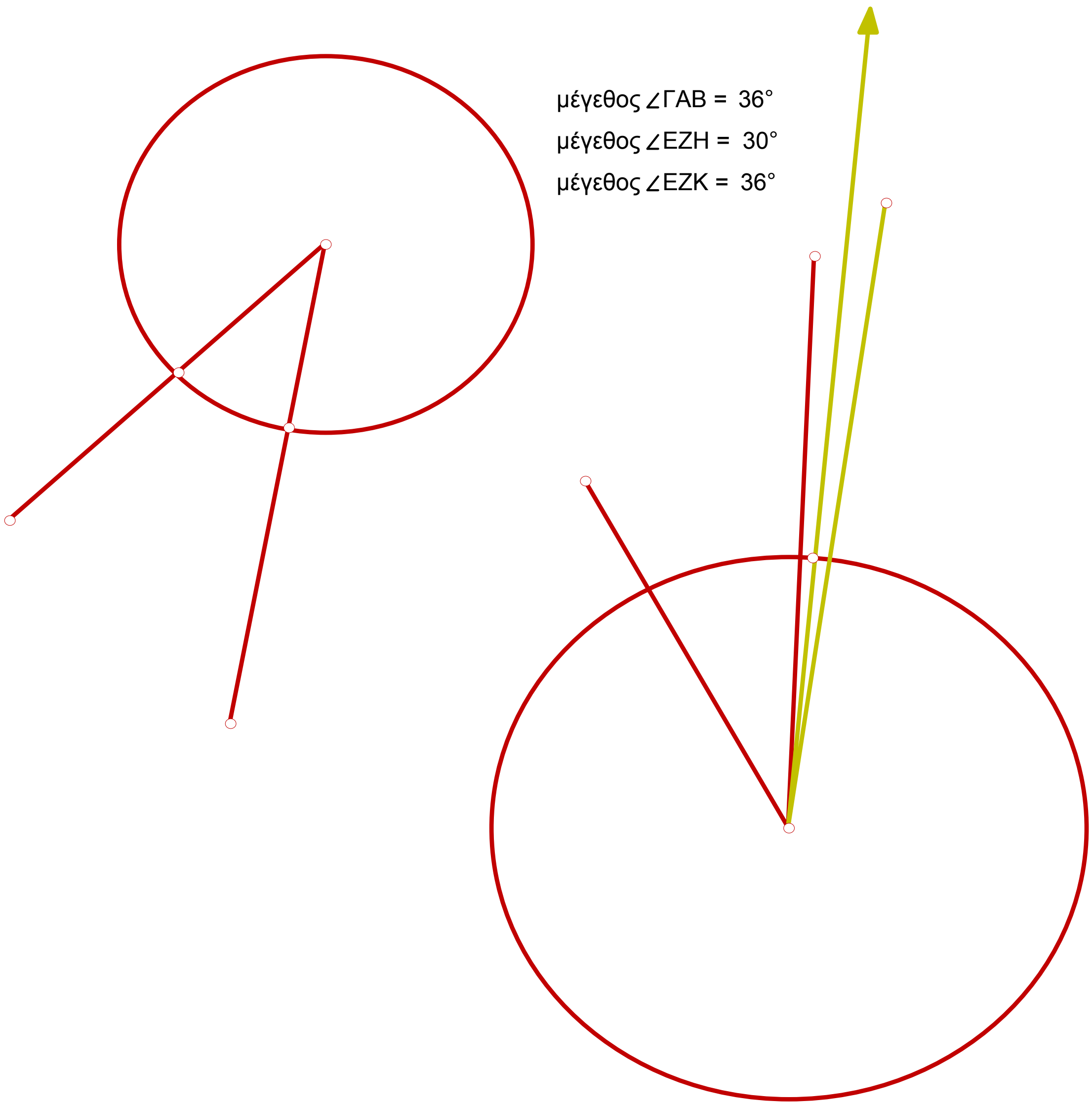
Αυτή επιτυγχάνεται με κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου με μια κάθετη α και υποτείνουσα 2 α , οπότε έχω και το ημ 30^o =1/2



***Απόδειξη IV* (Κατασκευή της διαφοράς δύο γωνιών)**

Καθίστανται επίκεντρες, σε ίσους κύκλους , μεταφέρω τα τόξα στα οποία βαίνουν, τα θέτω σε κοινή αρχή και να συμπίπτουν, οπότε σχηματίζεται η διαφορά των τόξων, άρα και των επικέντρων γωνιών στα οποία βαίνουν.

Με διχοτόμηση κατασκευάζω και την γωνία των 3^o


μέγεθος ∠ΓΑΒ = 36°
μέγεθος ∠ΕΖΗ = 30°
μέγεθος ∠ΕΖΚ = 36°